Sea g: $P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$ la aplicación dada por

$$g(a + b\,x + c\,x^2) = a\,(2+ x) + (b - c)\,x^3$$

a) Calcular la matriz asociada respecto de las bases canónicas y usarla para obtener una base del núcleo y otra de la imagen.
b) Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas de Ker(g) e Im(g).
c) ¿Es f un isomorfismo? Razonar la respuesta.
d) ¿Podemos definir un isomorfismo entre el subespacio Im(g) y el subespacio $U = L(\{x+1, x^2 - 1, 2x + 2x^2\})$? Razona la respuesta.

a) $g(a+bx+cx^2) = 2a + ax + 0x^2 + (b-c)x^3$

$B_c = \{1, x, x^2\}$ $\qquad B'_c = \{1, x, x^2, x^3\}$

$g(1) = g(1+0x+0x^2) = 2 + x \equiv (2, 1, 0, 0)_{B'_c}$

$g(x) = x^3 \equiv (0, 0, 0, 1)_{B'_c}$

$g(x^2) = -x^3 \equiv (0, 0, 0, -1)_{B'_c}$

$$A = M_{B_c, B'_c}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{A}{I}\right) \sim_c \left(\frac{C}{P}\right)$$

$$(A^t | I) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{f}{\sim} \begin{array}{l} F_1 \leftrightarrow \frac{1}{2}F_1 \\ \\ F_3 \leftrightarrow F_3 + F_2 \end{array}$$

$$\underset{f}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = (H | Q)$$

$$\left(\frac{A}{I}\right) \sim_c \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$B_{Im(g)}$

$B_{Ker(g)}$

$$B_{Im(g)} = \{(1, 1/2, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\} = \{1 + \tfrac{1}{2}x, \; x^3\}$$

$$B_{Ker(g)} = \{(0, 1, 1)\} = \{x + x^2\}$$

b)

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = \alpha \\ b = \frac{1}{2}\alpha \\ c = 0 \\ d = \beta \end{array}\right\} \text{Ec. param. de } Im(g)$$

$$\left.\begin{array}{l} c = 0 \\ b - \frac{1}{2}a = 0 \end{array}\right\} \text{Ec implícitas de } Im(g)$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 0 \\ b = \alpha \\ c = \alpha \end{array}\right\} \text{Ec. paramétricas de } Ker(g)$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 0 \\ b - c = 0 \end{array}\right\} \text{Ec. implic. de } Ker(g)$$

c) $\ker(g) \neq \{0\} \rightsquigarrow$ No es inyectiva

$\mathrm{Im}(g) \neq \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ $\left(\dim(\mathrm{Im}(g)) = 2 \neq 4 = \dim(\mathcal{P}_3(\mathbb{R})) \right)$

No es sobreyectiva

No es un isomorfismo.

$$\dim\left(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})\right) = 3 \neq \dim\left(\mathcal{P}_3(\mathbb{R})\right) = 4$$

No existe $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{f} \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ biyectiva.

d) $\dim(\mathrm{Im}(g)) = 2$

$$U = L(\{x+1, x^2-1, 2x+2x^2\})$$

$$x+1 \equiv (1,1,0)_{B_c}$$

$$x^2-1 \equiv (-1,0,1)_{B_c}$$

$$2x+2x^2 \equiv (0,2,2)_{B_c}$$

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2+2 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$B_U = \{x+1, x^2-1\} \rightsquigarrow \dim(U) = 2$

$\dim(U) = \dim(\mathrm{Im}(g)) = 2 \Rightarrow$ Podemos definir un isomorfismo entre ellos